$$
\begin{aligned}
\underline{x} &= x_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} \\
\underline{\dot{x}} &= (\mathrm{j}\omega)\, x_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = (\mathrm{j}\omega)\ \underline{x} \\
\underline{\ddot{x}} &= (\mathrm{j}\omega)(\mathrm{j}\omega)\, x_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = (\mathrm{j}\omega)^2\, \underline{x} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Jede Differentiation entspricht also einer Multiplikation mit $\mathrm{j}\omega$! Setzen wir diese Terme in die Differentialgleichung (8.7) ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&a_n(\mathrm{j}\omega)^n\, \underline{x} + a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1}\, \underline{x} + \ldots + a_1(\mathrm{j}\omega)\underline{x} + a_0\, \underline{x} = \\
&\qquad = b_m(\mathrm{j}\omega)^m\, \underline{y} + b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1}\, \underline{y} + \ldots + b_1(\mathrm{j}\omega)\underline{y} + b_0\, \underline{y}\ .
\end{aligned}
$$

Für den Frequenzgang ergibt sich also

$$
F(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{y}} = \frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m + b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(\mathrm{j}\omega) + b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n + a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(\mathrm{j}\omega) + a_0}\ . \tag{8.8}
$$

Beispiel: Wir betrachten ein P-T_1-Glied mit der Differentialgleichung

$$
T_1\, \dot{x} + x = K_\mathrm{P}\, y\ .
$$

Der Vergleich mit Differentialgleichung (8.7) liefert

$$
m = 0,\ n = 1,\ b_0 = K_\mathrm{P},\ \ a_0 = 1,\ a_1 = T_1\, .
$$

Für den Frequenzgang des P-T_1-Glieds ergibt sich also

$$
F(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_\mathrm{P}}{1 + \mathrm{j}\omega T_1}\ .
$$

Daraus folgt für den Betrag zunächst

$$
A(\omega) = \left|F(\mathrm{j}\omega)\right| = \frac{K_\mathrm{P}}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}\ .
$$

Zur Berechnung der Phase werden Zähler und Nenner zunächst mit $1 - \mathrm{j}\omega T_1$ multipliziert und der Ausdruck dann in Real- und Imaginärteil aufgespaltet:

$$
F(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_\mathrm{P}(1 - \mathrm{j}\omega T_1)}{(1 + \mathrm{j}\omega T_1)(1 - \mathrm{j}\omega T_1)} = \frac{K_\mathrm{P} - \mathrm{j}K_\mathrm{P}\omega T_1}{1 + (\omega T_1)^2} = \underbrace{\frac{K_\mathrm{P}}{1 + (\omega T_1)^2}}_{\text{Realteil}} + \mathrm{j}\underbrace{\frac{-K_\mathrm{P}\omega T_1}{1 + (\omega T_1)^2}}_{\text{Imaginärteil}}\ .
$$

Für die Phase gilt dann

$$
\varphi(\omega) = \angle F(\mathrm{j}\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}\{F(\mathrm{j}\omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(\mathrm{j}\omega)\}} = \arctan(-\omega T_1)\ .
$$

8.2 Grafische Darstellung des Frequenzgangs

Die Darstellung des Frequenzgangs eines Systems erfolgt in der Regel grafisch, wobei zwischen der Darstellung in Form des *Bode-Diagramms* und der *Nyquist-Ortskurve* zu unterscheiden ist.

Beim Bode-Diagramm werden Amplituden- und Phasengang als *Amplitudenkennlinie* (*Betragskennlinie*) und *Phasenkennlinie* über der logarithmisch geteilten Frequenzachse aufgetragen, wobei die Amplitudenkennlinie meist in dB angegeben wird. **Bild 8.3** zeigt ein solches Bode-Diagramm für ein (nicht schwingfähiges) P-T_2-Glied.

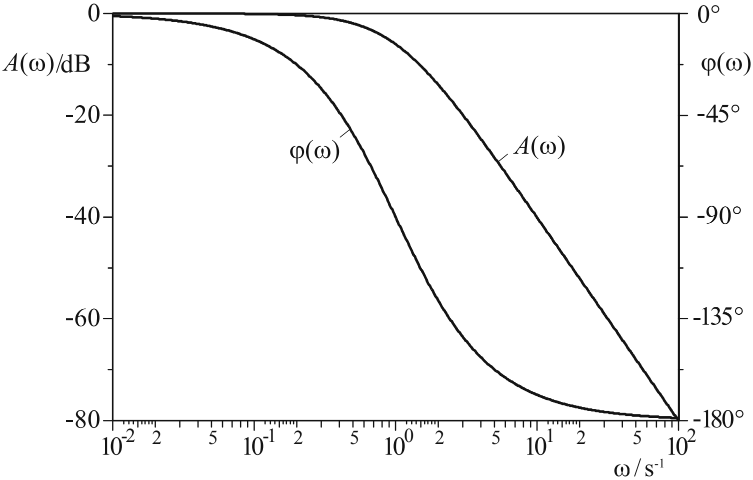

Bild 8.3 Bode-Diagramm eines P-T_2-Glieds, bestehend aus Betrags- und Phasenkennlinie

Wir wollen die charakteristischen Eigenschaften eines solchen Bode-Diagramms hier zunächst noch nicht genauer betrachten, sondern stattdessen einen kurzen Blick auf die zugehörige Nyquist-Ortskurve werfen, die in **Bild 8.4** gezeigt ist. In dieser ist der Frequenzgang in der komplexen Ebene dargestellt, d. h. aufgesplittet in Real- und Imaginärteil, wobei die Frequenz ω als Kurvenparameter fungiert. Die Ortskurve „startet" für $\omega = 0$ auf der reellen Achse im Punkt +1, durchläuft mit zunehmender Frequenz dann den vierten und dritten Quadranten und läuft für $\omega \to \infty$ in den Koordinatenursprung. Zusätzlich eingezeichnet ist der sogenannte *Einheitskreis*, den wir später insbesondere für den Reglerentwurf bzw. Stabilitätsbetrachtungen benötigen.

Bode-Diagramm und Nyquist-Ortskurve enthalten exakt dieselbe Information, sodass sich die eine Darstellungsform jeweils in die andere überführen lässt. So lassen sich Real- und Imaginärteil des Frequenzgangs $F(\mathrm{j}\omega)$ für eine bestimmte Frequenz ω_0 aus Betrag und Phase ermitteln aus den Umrechnungsformeln

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{F(\mathrm{j}\omega_0)\} &= A(\omega_0)\cdot\cos(\varphi(\omega_0)) \\ \operatorname{Im}\{F(\mathrm{j}\omega_0)\} &= A(\omega_0)\cdot\sin(\varphi(\omega_0))\ , \end{aligned} \tag{8.9}$$

während sich umgekehrt Betrag und Phase aus Real- und Imaginärteil ergeben aus den Gleichungen

$$A(\omega_0) = \sqrt{\mathrm{Re}\{F(\mathrm{j}\omega_0)\}^2 + \mathrm{Im}\{F(\mathrm{j}\omega_0)\}^2}$$
$$\varphi(\omega_0) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{F(\mathrm{j}\omega_0)\}}{\mathrm{Re}\{F(\mathrm{j}\omega_0)\}}\right). \tag{8.10}$$

Bild 8.5 verdeutlicht die Zusammenhänge noch einmal grafisch.

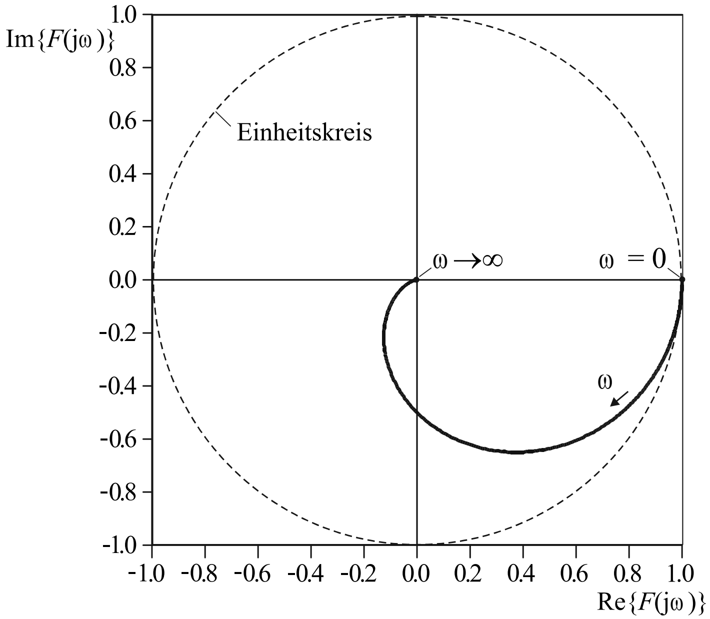

Bild 8.4 Nyquist-Ortskurve des P-T_2-Glieds mit dem Bode-Diagramm gemäß Bild 8.3

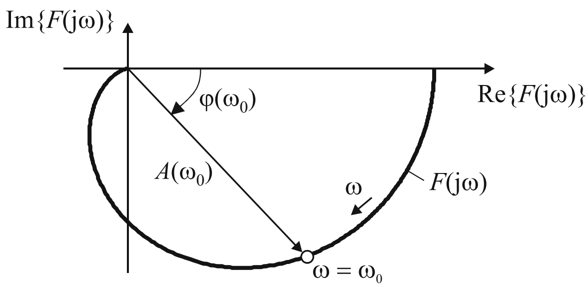

Bild 8.5 Zusammenhang zwischen Betrag/Phase und Real-/Imaginärteil des Frequenzgangs $F(\mathrm{j}\omega)$

Der Frequenzgang eines linearen Systems lässt sich grafisch als Bode-Diagramm oder aber als Nyquist-Ortskurve darstellen. Während das Bode-Diagramm die Betrags- und Phasenkennlinie des Systems über der logarithmischen Frequenzachse zeigt, ist der Frequenzgang in der Nyquist-Ortskurve in der komplexen Ebene mit der Frequenz als Kurvenparameter dargestellt.

Auch die Charakteristika einer Nyquist-Ortskurve wollen wir in diesem Abschnitt zunächst noch außer Acht lassen; wir werden im nachfolgenden Abschnitt die Frequenzgänge regelungstechnischer Standardglieder betrachten und in diesem Zusammenhang dann auch die erforderlichen Kennwerte kennenlernen.

8.3 Frequenzgang regelungstechnischer Grundglieder

8.3.1 P-Glied

Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße war beim P-Glied gegeben durch die Beziehung

$$x(t) = K_\mathrm{P} \cdot y(t)\ .$$

Die Ausgangsgröße ist also bis auf die Multiplikation mit dem Proportionalbeiwert K_P mit der Eingangsgröße identisch. Betrachten wir zunächst den praxisrelevanten Fall $K_\mathrm{P} > 0$. Das sinusförmige Eingangssignal erscheint dann um den Faktor K_P verstärkt (für $K_\mathrm{P} > 1$) bzw. abgeschwächt (für $K_\mathrm{P} < 1$) am Ausgang, wobei es identische Phasenlage wie das Eingangssignal besitzt. Für den Amplitudengang (Betragskennlinie) gilt dann also

$$A(\omega) = |F(\mathrm{j}\omega)| = \frac{x_0}{y_0} = K_\mathrm{P}$$

bzw. in dB

$$A(\omega)\big|_\mathrm{dB} = |F(\mathrm{j}\omega)|_\mathrm{dB} = 20 \cdot \log K_\mathrm{P}\ .$$

Da Ein- und Ausgangssignal unabhängig von der Frequenz phasensynchron verlaufen, gilt für den Phasengang (Phasenkennlinie)

$$\varphi(\omega) = \angle F(\mathrm{j}\omega) = 0°\ .$$

Bild 8.6 zeigt das Bode-Diagramm eines P-Glieds mit einem Proportionalbeiwert von $K_\mathrm{P} = 10 \mathrel{\hat{=}} 20$ dB.[16] Sowohl Betrags- als auch Phasenkennlinie verlaufen parallel zur ω-Achse: der Betrag bei einem konstanten Wert von $A(\omega) = 20$ dB, die Phase bei einem Wert von 0°.

[16] Betrags- und Phasenkennlinie sind hier – wie auch in den meisten nachfolgenden Fällen – aus Gründen der Übersichtlichkeit in zwei getrennten Diagrammen dargestellt.

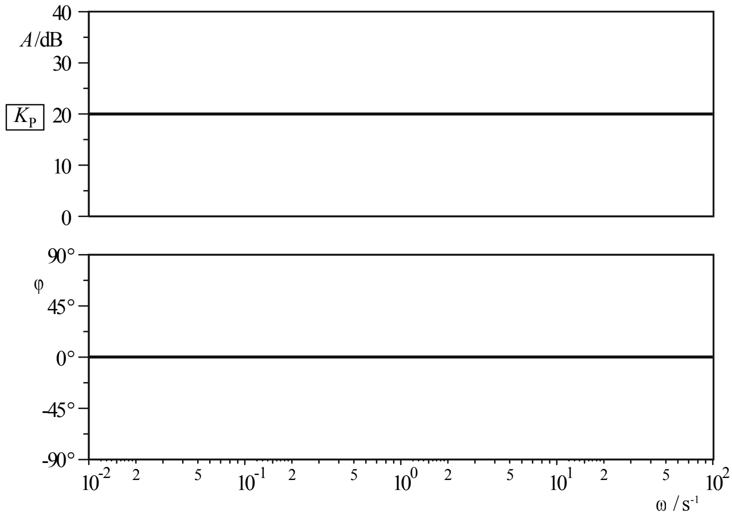

Bild 8.6 Bode-Diagramm eines P-Glieds mit K_P = 10

Ist der Proportionalbeiwert negativ ($K_P < 0$), so weisen Ein- und Ausgangssignal des P-Glieds umgekehrte Vorzeichen auf, d. h., die beiden Sinussignale sind um 180° phasenverschoben. Der Betrag ist in diesem für die Praxis wenig relevanten Fall durch den Betrag des Proportionalbeiwerts (also $|K_P|$) gegeben, während die Phasenkennlinie konstant bei −180° verläuft.

> Die Betragskennlinie eines P-Glieds verläuft parallel zur ω-Achse auf dem durch den Proportionalbeiwert K_P gegebenen Wert. Die Phasenkennlinie verläuft für $K_P > 0$ auf einem konstanten Phasenwert von 0°, für $K_P < 0$ auf einem konstanten Phasenwert von −180°.

Da sowohl Betrag als auch Phase eines P-Glieds unabhängig von der Frequenz ω sind, besteht die Nyquist-Ortskurve lediglich aus einem einzigen Punkt. Der Realteil dieses Punkts entspricht dabei gerade dem Proportionalbeiwert K_P, der Imaginärteil beträgt 0 (d. h., der Punkt liegt auf der reellen Achse). **Bild 8.7** zeigt als Beispiel die Ortskurve eines P-Glieds mit einem Proportionalbeiwert von 0.5.

Die Datei *P-Glied.ufk* enthält ein P-Glied mit einem Proportionalbeiwert von 3. Lassen Sie sich Bode-Diagramm und Nyquist-Ortskurve des Glieds anzeigen, und untersuchen Sie, welchen Einfluss eine Änderung des Proportionalbeiwerts hat!

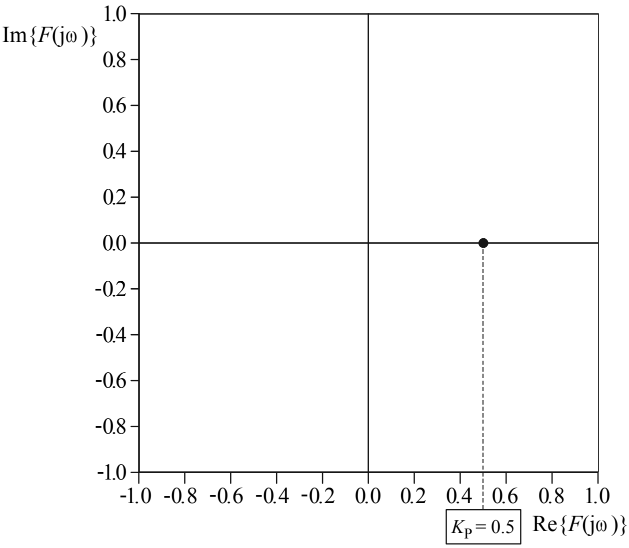

Bild 8.7 Nyquist-Ortskurve eines P-Glieds mit K_P = 0.5

8.3.2 P-T_1-Glied

Bild 8.8 zeigt das Bode-Diagramm eines P-T_1-Glieds mit einem Proportionalbeiwert von $K_P = 10$ und einer Zeitkonstante von $T_1 = 2$ s.

Wir können dem Bode-Diagramm folgende Merkmale entnehmen:

- Die Betragskennlinie startet für $\omega \to 0$ bei dem durch den Proportionalbeiwert gegebenen Wert (hier also einem Wert von 10 $\mathrel{\hat{=}}$ 20 dB) und verläuft für niedrige Frequenzen dann zunächst parallel zur ω-Achse.
- Für sehr hohe Frequenzen fällt die Betragskennlinie mit 20 dB/Dekade ab. Das P-T_1-Glied weist also – wie praktisch alle Typen von Regelstrecken – *Tiefpassverhalten* auf, d. h., niedrige Frequenzen werden besser „durchgelassen“ als hohe Frequenzen, die zunehmend gedämpft werden. Man bezeichnet das P-T_1-Glied daher speziell in der Nachrichtentechnik auch als *Tiefpass 1. Ordnung*.
- Bei der sogenannten *Eckfrequenz*[17] ω_1 (hier 0.5 s^{-1}) ist die Betragskennlinie gerade um 3 dB gegenüber ihrem Anfangswert abgefallen. Diese Eckfrequenz entspricht dabei dem Kehrwert der Zeitkonstante des P-T_1-Glieds, d. h. es gilt

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}\,.$$

- Die Phasenkennlinie startet bei einem Wert von 0° und strebt für hohe Frequenzen asymptotisch gegen einen Wert von –90°. Bei der Eckfrequenz beträgt der Wert gerade –45°, links und rechts davon verläuft die Kennlinie symmetrisch.

[17] genau genommen Eck*kreis*frequenz

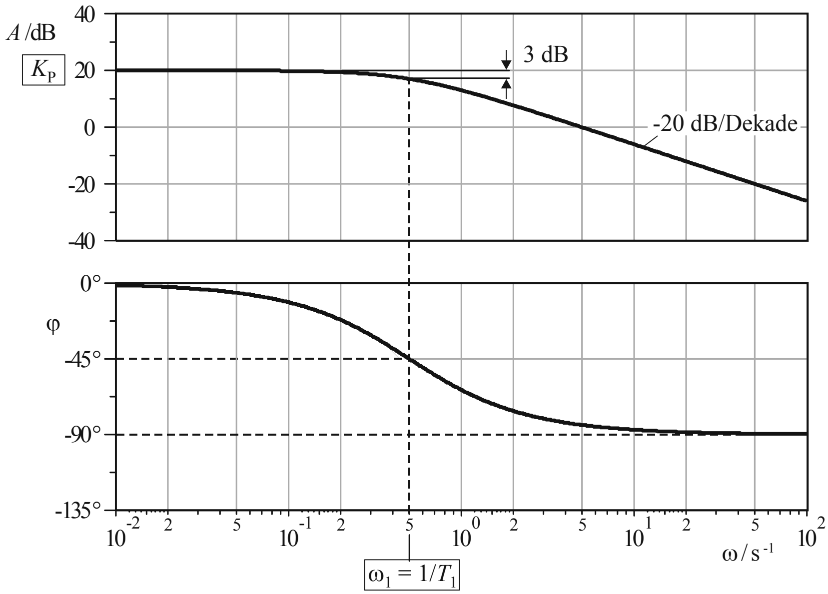

Bild 8.8 Bode-Diagramm eines P-T$_1$-Glieds mit K_P = 10 und T = 2 s

Wie **Bild 8.9** zeigt, lässt sich die Betragskennlinie sehr gut durch zwei Asymptoten annähern, die sich bei der Eckfrequenz treffen. Die maximale Abweichung zur exakten Kennlinie beträgt dann gerade 3 dB und tritt bei der Eckfrequenz auf. Insbesondere für den Fall, dass eine Betragskennlinie „per Hand" erstellt werden soll, empfiehlt sich diese asymptotische Näherung. Da die Betragskennlinie in asymptotischer Näherung bei ω_1 quasi „abknickt", wird die Eckfrequenz häufig auch als *Knickfrequenz* bezeichnet.

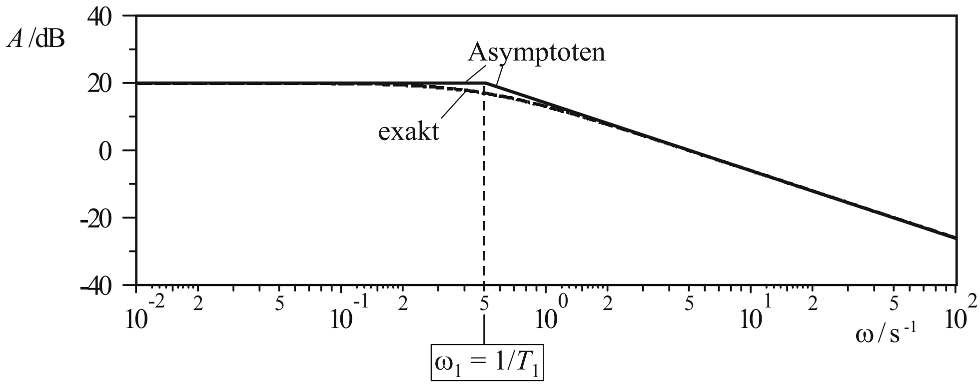

Bild 8.9 Asymptotische Näherung der Betragskennlinie

Die Betragskennlinie eines P-T$_1$-Glieds startet bei K_P und fällt dann bis zur Eckfrequenz $\omega_1 = 1/T_1$ um 3 dB ab. Für hohe Frequenzen fällt sie mit 20 dB/Dekade. Die Phasenkennlinie startet bei 0° und strebt für hohe Frequenzen gegen –90°. Bei der Eckfrequenz hat sie den Wert –45°.